

Matrizes

Uma forma de trabalhar com essas informações é através de modelos de matrizes.

Originalmente proposto por Leslie (1945-1948) os modelos de matrizes são conveniente para modelar populações.

O modelo básico, chamado de matriz de Leslie, tem o seguinte formato:

$$n(t+1) = A.n(t) \text{ ou } n(t)=A^t.n(0)$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix} (t+1) = \begin{pmatrix} F1 & F2 & F3 & \dots & F_s \\ P1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{s-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix} (t)$$

Se sabemos o número de indivíduos de cada idade no tempo t , podemos prever o número de indivíduos após um intervalo de tempo. A matriz A é chamada de matriz de projeção da população.

As informações utilizadas na matriz de projeção são derivadas de tabelas de vida. Entretanto, os dados precisam ser transformados para que sejam utilizados

Matrizes

O primeiro ponto a ser considerado é o fato de que o tempo é uma variável contínua e que os indivíduos são classificados em classes etárias

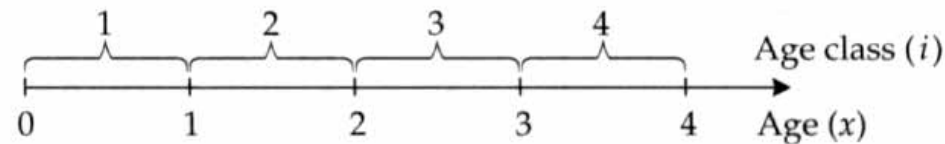


Figure 3.1 The relationship between ages (x) and age classes (i) in population growth models. (From Caswell 1989.)

Posteriormente, é preciso definir um intervalo de projeção (tempo) de mesma duração que o intervalo de classe utilizado. Considerando $n_i(t)$ = número de indivíduos na classe etária i , no tempo t e P_i = probabilidade de sobrevivência dos indivíduos da classe etária i , temos:

$$n_i(t+1) = P_{i-1} \cdot n_{i-1}(t) \text{ para } i=2,3,4,\dots$$

Matrizes

Para os indivíduos da classe etária inicial (classe 1), considerando F_i = fertilidade = número de indivíduos da classe etária 1, produzidos por indivíduo da classe etária i , temos:

$$n_1(t+1) = \sum F_i \cdot n_i(t)$$

Populações com natalidade contínua (nascimentos ocorrem continuamente durante o intervalo de tempo):

$$P_i = (l_i + l_{i+1}) / (l_{i-1} + l_i)$$

$$F_i = l_{0,5}([m_i + P_i m_{i+1}] / 2)$$

Matrizes

Populações com natalidade em pulsos (reprodução é concentrada em uma pequena estação reprodutiva):

Nesse caso, a distribuição etária, bem como a forma de calcular P_i e F_i , dependem de quando o censo (p) for feito, com relação à quando ocorreu a reprodução (pulso)

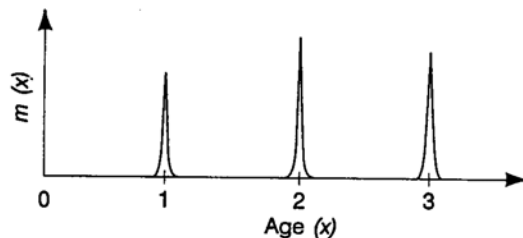


Figure 2.2: The maternity function for a birth-pulse population. Individuals reproduce only on their birthday.

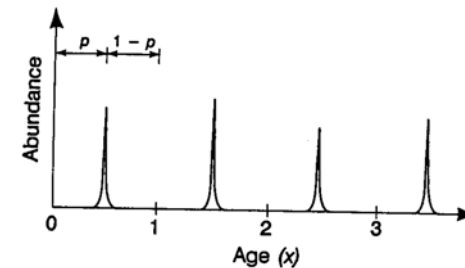


Figure 2.3: The age distribution at the time of census for a birth-pulse population. The time of the census is defined by p , the proportion of the time interval elapsing between the pulse of reproduction and the census.

Em muitos estudos, os censos são feitos pouco antes ou pouco após o período de reprodução. Esses casos correspondem aos limites $p \rightarrow 1$ e $p \rightarrow 0$

se $p \rightarrow 0$ (censo após reprodução) temos que: $P_i = l_i / l_{i-1}$ e $F_i = P_i m_i$

se $p \rightarrow 1$ (censo antes da reprodução) temos que: $P_i = l_{i+1} / l_i$ e $F_i = l_1 m_i$

Matrizes

Os resultados para as taxas de crescimento populacional diferem de acordo com o modelo utilizado

			pulso		
			p --> 0	p --> 1	
pi					
i	contínua				
1	$(0,8+0,4)/(1,0+0,8) = 0,667$		$0,8/1,0 = 0,8$	$0,8/0,8 = 1$	
2	$(0,4+0,1)/(0,8+0,4) = 0,417$		$0,4/0,8 = 0,5$	$0,4/0,8 = 0,5$	
3	$(0,1+0,0)/(0,4+0,1) = 0,2$		$0,1/0,4 = 0,25$	$0,1/0,4 = 0,25$	
4	0		0	0	
Fi					
i	contínua				
1	$0,9 \times ((2+0,667 \times 3)/2) = 1,8$		$0,8 \times 2 = 1,6$	$0,8 \times 2 = 1,6$	
2	$0,9 \times ((3+0,417 \times 1)/2) = 1,537$		$0,5 \times 3 = 1,5$	$0,8 \times 3 = 2,4$	
3	$0,9 \times ((1+0,2 \times 0)/2) = 0,45$		$0,25 \times 1 = 0,25$	$0,8 \times 1 = 0,8$	
4	0		0	0	

x	lx	mx
0	1,0	0
1	0,8	2
2	0,4	3
3	0,1	1
4	0,0	0

	λ
contínua	2,2748
p --> 0	2,1733
p --> 1	1,5536

A ordem dos fatores altera o produto

$$n(t+1) = A.B.n(t) \neq B.A.n(t)$$

Darwin, J.H. & R.M. Williams. 1964. The effect of time of hunting on the size of a rabbit population. New Zeland Journal of Science 7: 341-352



13 Matrizes de transição ao longo do ano: A B C D E F G H I J K L M

1 Matriz de caça: X

Simulações: $n(t+1) = A.B.C.D.E.F.G.H.I.J.K.L.M.n(t)$

$$n(t+1) = A.X.B.C.D.E.F.G.H.I.J.K.L.M.n(t)$$

$$n(t+1) = A.B.X.C.D.E.F.G.H.I.J.K.L.M.n(t)$$

$$n(t+1) = A.B.C.X.D.E.F.G.H.I.J.K.L.M.n(t)$$

⋮

$$n(t+1) = A.B.C.D.E.F.G.H.I.J.K.L.X.M.n(t)$$

Referências

Caswell, H. 1989. Matrix population models. Sinauer. Sunderland.

Darwin, J.H. & R.M. Williams. 1964. The effect of time of hunting on the size of a rabbit population. New Zeland Journal of Science 7: 341-352

Enright, N.J., Franco, M. & Silvertown, J. 1995. Comparing plant life histories using elasticity analysis: the importance of life span and the number of life cycle stages. Oecologia 104: 79-84.

Law, R. 1983. A model for the dynamics of a plant population containing individuals classified by age and size. Ecology 64: 224-230.

de Matos, M.B. & Silva Matos, D.M. 1998. Mathematical constraints on transition matrix elasticity analysis. Journal of Ecology 86: 706-708.

Piñero, D., Martinez-Ramos, M. & Sarukhán, J. 1984. A population model of *Astrocaryum mexicanum* and a sensitivity analysis of its finite rate of increase. Journal of Ecology 72: 977-991.

Silva Matos, D.M., Freckleton, R.P. & Watkinson, A.R. 1999. The role of density dependence in the population dynamics of a tropical palm. Ecology 80; 2635-2650.