

Aula Modelos de Matrizes

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I_3$$

$$\vec{0} = \lambda I_n \vec{v} - A \vec{v} \Leftrightarrow \vec{0} = (\lambda I_n - A) \vec{v}$$

$$(\lambda I_n - A) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\lambda I_3 - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \left| \det(\lambda I_n - A) = 0 \right.$$

$$(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-2) + 4 + 4 - 4(\lambda-2) - (\lambda+1) - 4(\lambda-2)$$

8

Mauricio Bonesso Sampaio
mauriciobonesso@gmail.com
Pesquisador de Pós-doutorado

Conteúdo da Aula

- Para que serve estudar a dinâmica de uma população?
- Como funcionam os modelos de matrizes
- Projeção da população no futuro
- Dinâmica populacional transiente
- Dinâmica populacional assintótica
- Métricas usadas para descrever a dinâmica de uma população
 - Autovalor dominante
 - Estrutura estável
 - Valor reprodutivo
 - Sensibilidade e elasticidade
- Modelos estocásticos

Para que serve a dinâmica populacional?

Para que serve a dinâmica populacional?

- Prever o tamanho de uma população no futuro?
- Avaliar as chances de extinção local
- Avaliar o impacto de distúrbios (naturais / antrópicos)
- Comparar a dinâmica de duas, ou mais, populações
- Avaliar quais fases do ciclo de vida são mais importantes para a dinâmica
- Avaliar a eficiência de ações de conservação (reintrodução/controlado de invasora)

Dinâmica populacional

$$N_{t+1} = N_t + B - D$$

Migração pode ser incluída

Modelos matriciais

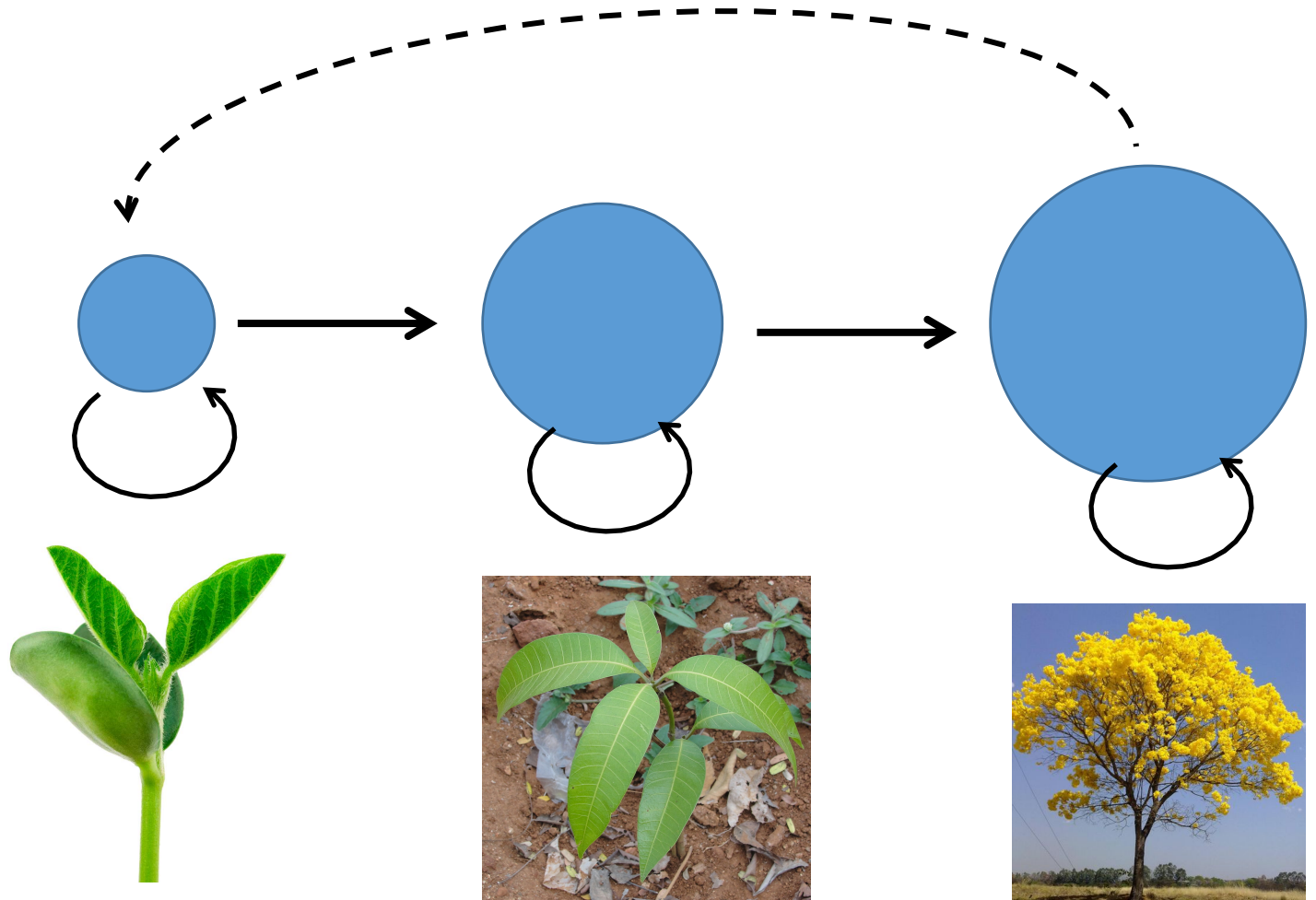
- Considera as variações entre indivíduos
- Modelo estruturado
- Taxas demográficas são calculados para cada (estádio/classe/categoria)
- Matriz de transição é utilizada para calcular parâmetros demográficos
- Não há necessidade de acompanhar o ind. ao longo da sua vida inteira

Como funciona o modelo matricial?

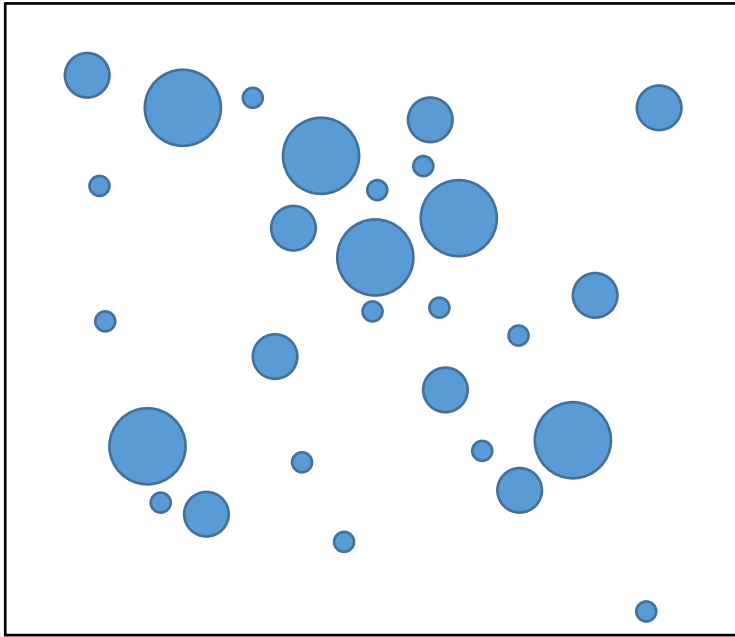
- População com 3 estádios: plântula, jovem e adulto
- Objetivo: projetar o tamanho populacional no futuro

Gráfico do ciclo de vida:

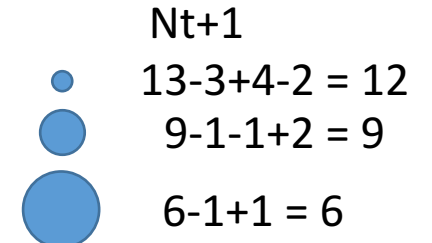
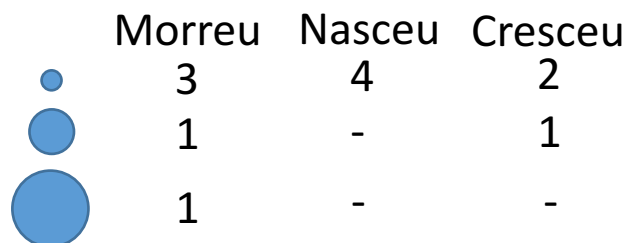
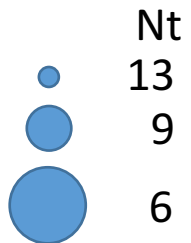
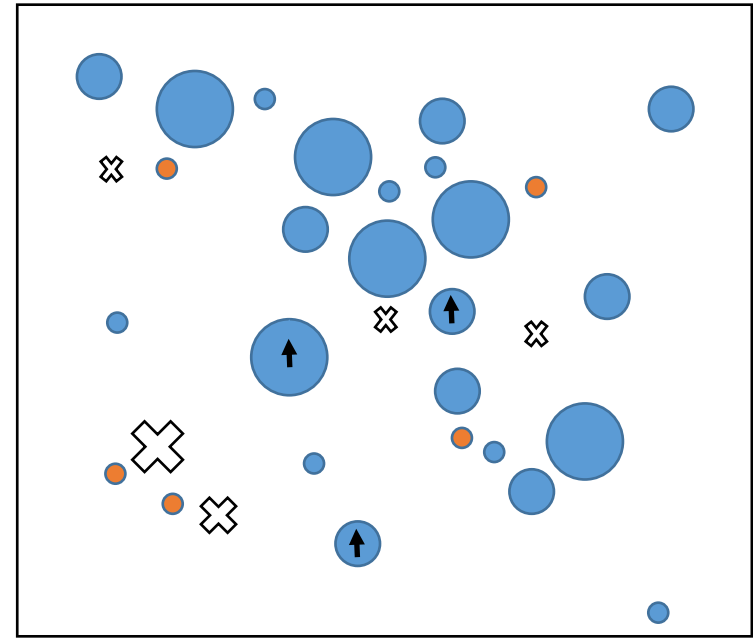
Life cycle graph





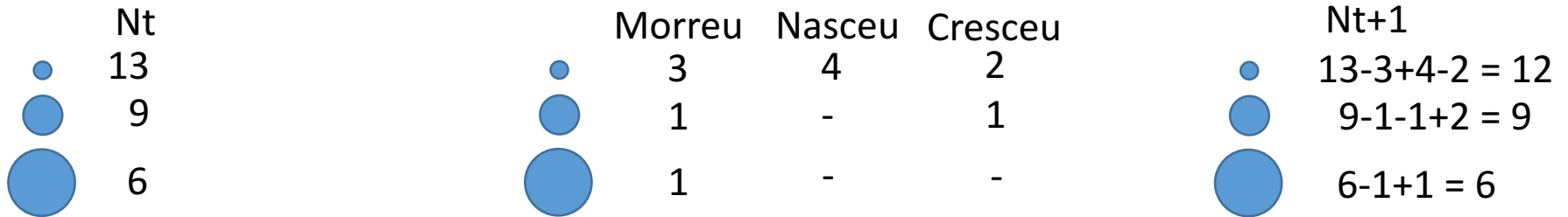
Tempo = t



Tempo = t+1



1ª amostragem  Intervalo demográfico  2ª amostragem

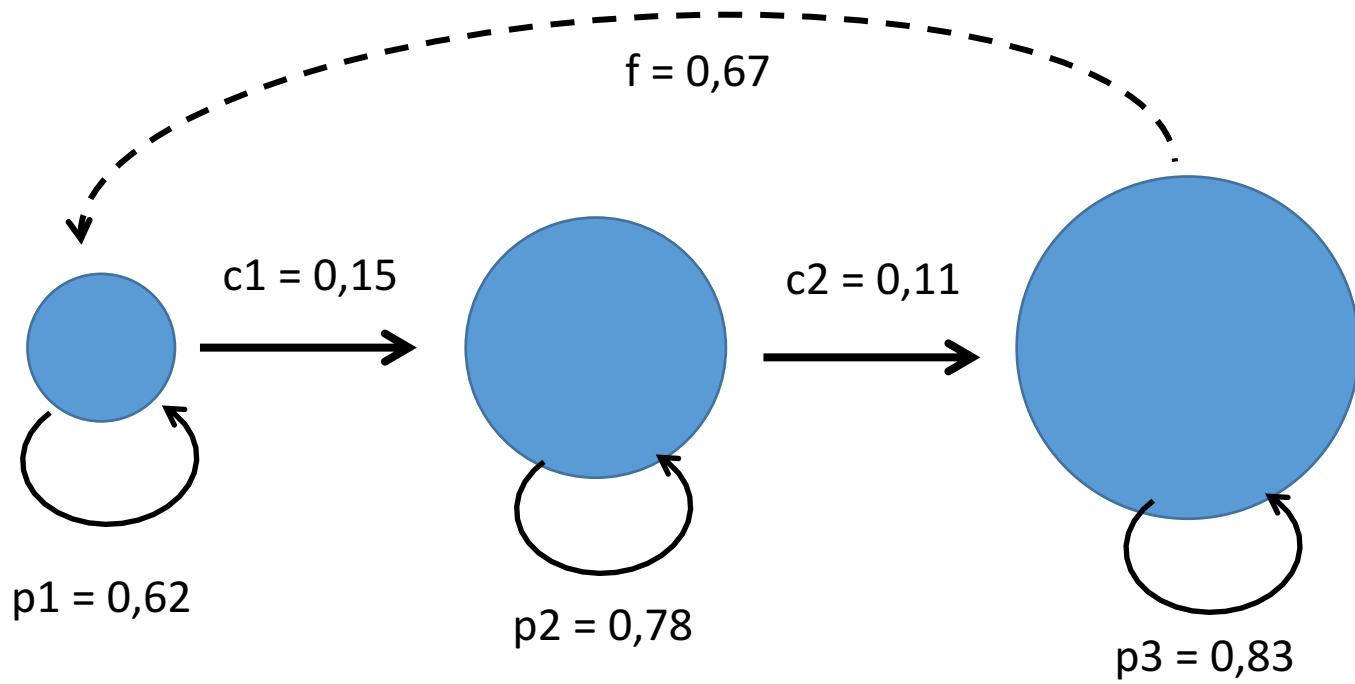


Taxas demográficas (ou probabilidades):

	Mortalidade	Crescimento	Sobrevivência	Permanência	Fecundidade
●	$3/13 = 0,23$	$2/13 = 0,15$	$10/13 = 0,77$	$8/13 = 0,62$	-
●	$1/9 = 0,11$	$1/9 = 0,11$	$8/9 = 0,89$	$7/9 = 0,78$	-
●	$1/6 = 0,17$	-	$5/6 = 0,83$	$5/6 = 0,83$	$4/6 = 0,67$ plântulas/adulto

Fecundidade: nº médio de plântulas produzidas por um ind. reprodutivo

Mortalidade	Crescimento	Sobrevivência	Permanência	Fecundidade
$3/13 = 0,23$	$2/13 = 0,15$	$10/13 = 0,77$	$8/13 = 0,62$	-
$1/9 = 0,11$	$1/9 = 0,11$	$8/9 = 0,89$	$7/9 = 0,78$	-
$1/6 = 0,17$	-	$5/6 = 0,83$	$5/6 = 0,83$	$4/6 = 0,67$ plântulas/adulto



Qual será o tamanho populacional em t+2?

	Mortalidade	Transição entre estádios	Sobrevivência	Permanência	Fecundidade
●	$3/13 = 0,23$	$2/13 = 0,15$	$10/13 = 0,77$	$8/13 = 0,62$	-
●	$1/9 = 0,11$	$1/9 = 0,11$	$8/9 = 0,89$	$7/9 = 0,78$	-
●	$1/6 = 0,17$	-	$5/6 = 0,83$	$5/6 = 0,83$	$4/6 = 0,67$ plântulas/adulto

Intervalo demográfico 1

Intervalo demográfico 2

1ª amostragem



2ª amostragem



3ª amostragem

Tempo t

Tempo t+1

Tempo t+2

N_t

N_{t+1}

N_{t+2}

● 13

● 9

● 6

Total 28

● 12

● 9

● 6

Total 27

● $12 * 0,62 + 0,67 * 6 = 11$

● $9 * 0,78 + 12 * 0,15 = 9$

● $6 * 0,83 + 9 * 0,11 = 6$

26

Você confiaria nestas taxas para projetar a população no futuro (100 anos)?

	Mortalidade	Transição entre estádios	Sobrevivência	Permanência	Fecundidade
●	$3/13 = 0,23$	$2/13 = 0,15$	$10/13 = 0,77$	$8/13 = 0,62$	-
●	$1/9 = 0,11$	$1/9 = 0,11$	$8/9 = 0,89$	$7/9 = 0,78$	-
●	$1/6 = 0,17$	-	$5/6 = 0,83$	$5/6 = 0,83$	$4/6 = 0,67$ plântulas/adulto

Você confiaria nestas taxas para projetar a população no futuro (100 anos)?

	Mortalidade	Transição entre estádios	Sobrevivência	Permanência	Fecundidade
●	$3/13 = 0,23$	$2/13 = 0,15$	$10/13 = 0,77$	$8/13 = 0,62$	-
●	$1/9 = 0,11$	$1/9 = 0,11$	$8/9 = 0,89$	$7/9 = 0,78$	-
●	$1/6 = 0,17$	-	$5/6 = 0,83$	$5/6 = 0,83$	$4/6 = 0,67$ plântulas/adulto

Baixo n amostral para estimar as taxas demográficas com precisão

- Cada ind. morto em 6 indivíduos representa 17%

- Se forem amostrados 100 indivíduos de cada categoria, cada um deles representa 1%

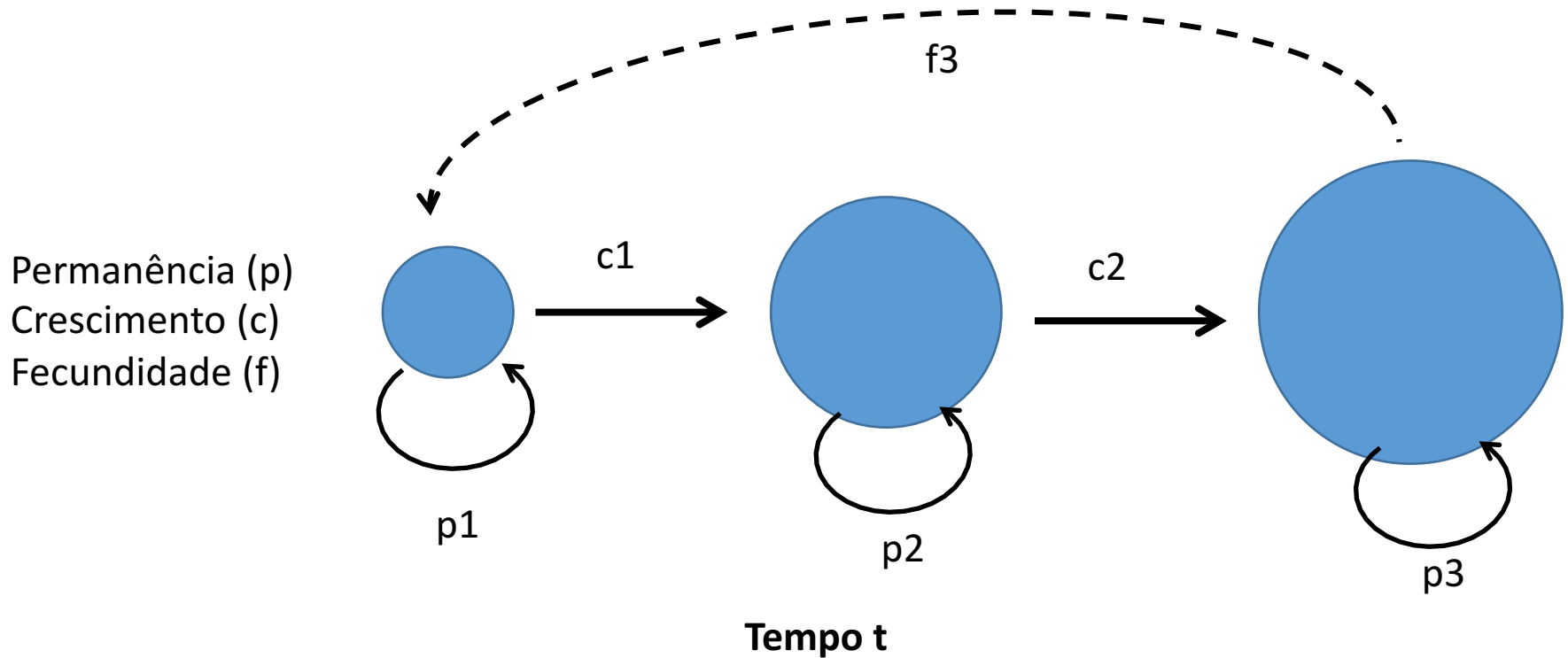
Qual será o tamanho da população em t_{100} ?

- Modelo Matricial:

$$n_{t+1} = A n_t$$

- A = matriz de transição
- n = vetor coluna contendo o n° de indivíduos em cada estágio no tempo t
- Facilita a operacionalização das contas e requer pouco processamento de dados
- Possibilita o cálculo de vários outros parâmetros populacionais

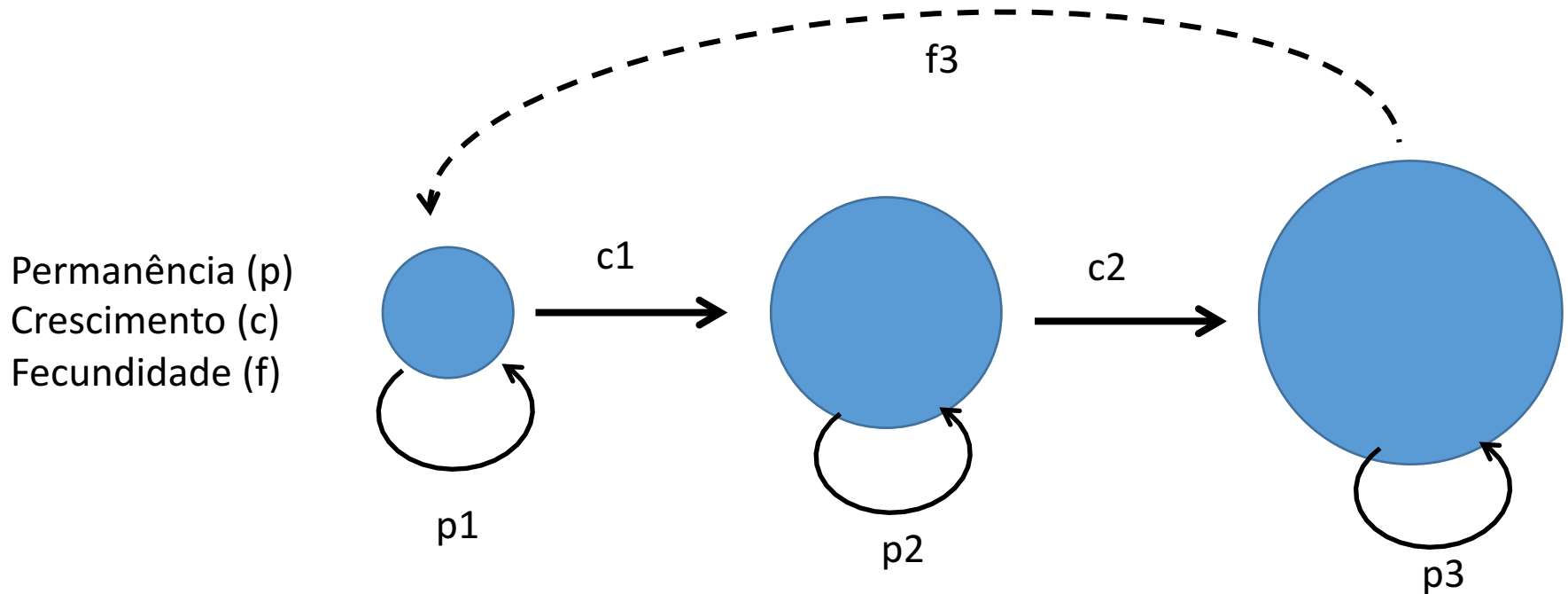
Matriz de transição (A):



Fecundidade: nº
médio de plântulas
produzidas por um
ind. reprodutivo

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{plântula} & \text{jovem} & \text{adulto} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{plântula} \\ \text{jovem} \\ \text{adulto} \end{matrix} & \begin{bmatrix} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & 0 \\ 0 & c2 & p3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{Tempo t+1} \end{matrix}$$

Matriz de transição (A):



Tempo t

plântula jovem adulto

$$A = \begin{bmatrix} 0,62 & 0 & 0,67 \\ 0,15 & 0,78 & 0 \\ 0 & 0,11 & 0,83 \end{bmatrix}$$

plântula

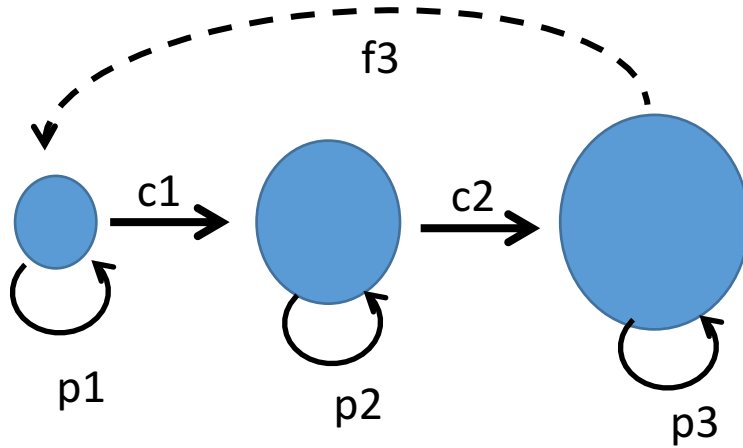
jovem

adulto

Tempo t+1

Fecundidade: nº
médio de plântulas
produzidas por um
ind. reprodutivo

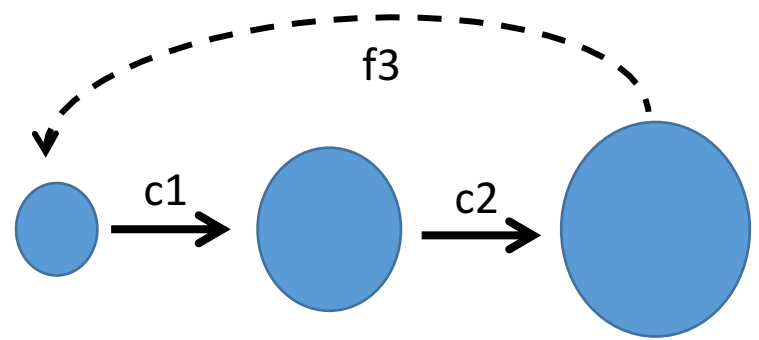
Matriz de Lefkovitch



$$A = \begin{bmatrix} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & 0 \\ 0 & c2 & p3 \end{bmatrix}$$

- Estádios ontogenéticos ou classes de tamanho
- Muito utilizada para plantas

Matriz de Leslie



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f3 \\ c1 & 0 & 0 \\ 0 & c2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Classes etárias
- Pouco utilizada para plantas

Modelo Matricial

$$n_{t+1} = A n_t$$

	n_3		A		n_2
plântula	$\begin{bmatrix} m1 \\ m2 \\ m3 \end{bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & 0 \\ 0 & c2 & p3 \end{bmatrix}$	*	$\begin{bmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{bmatrix}$
jovem					
adulto					

$$n_{t+1} = A n_t$$

	n_3		A		n_2
plântula	$\begin{bmatrix} m1 \\ m2 \\ m3 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & 0 \\ 0 & c2 & p3 \end{bmatrix}$	$*$	$\begin{bmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{bmatrix}$
jovem					
adulto					

$$m1 = (p1 \times n1) + (0 \times n2) + (f3 \times n3)$$

$$n_{t+1} = A n_t$$

	n_3	A	n_2
plântula	$\begin{bmatrix} m1 \\ m2 \\ m3 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & 0 \\ 0 & c2 & p3 \end{bmatrix} *$	$\begin{bmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{bmatrix}$
jovem			
adulto			

$$m1 = (p1 \times n1) + (0 \times n2) + (f3 \times n3)$$

$$m2 = (c1 \times n1) + (p2 \times n2) + (0 \times n3)$$

$$n_{t+1} = A n_t$$

	n_3		A		n_2
plântula	$\begin{bmatrix} m1 \\ m2 \\ m3 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & 0 \\ 0 & c2 & p3 \end{bmatrix}$	$*$	$\begin{bmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{bmatrix}$
jovem					
adulto					

$$m1 = (p1 \times n1) + (0 \times n2) + (f3 \times n3)$$

$$m2 = (g1 \times n1) + (p2 \times n2) + (0 \times n3)$$

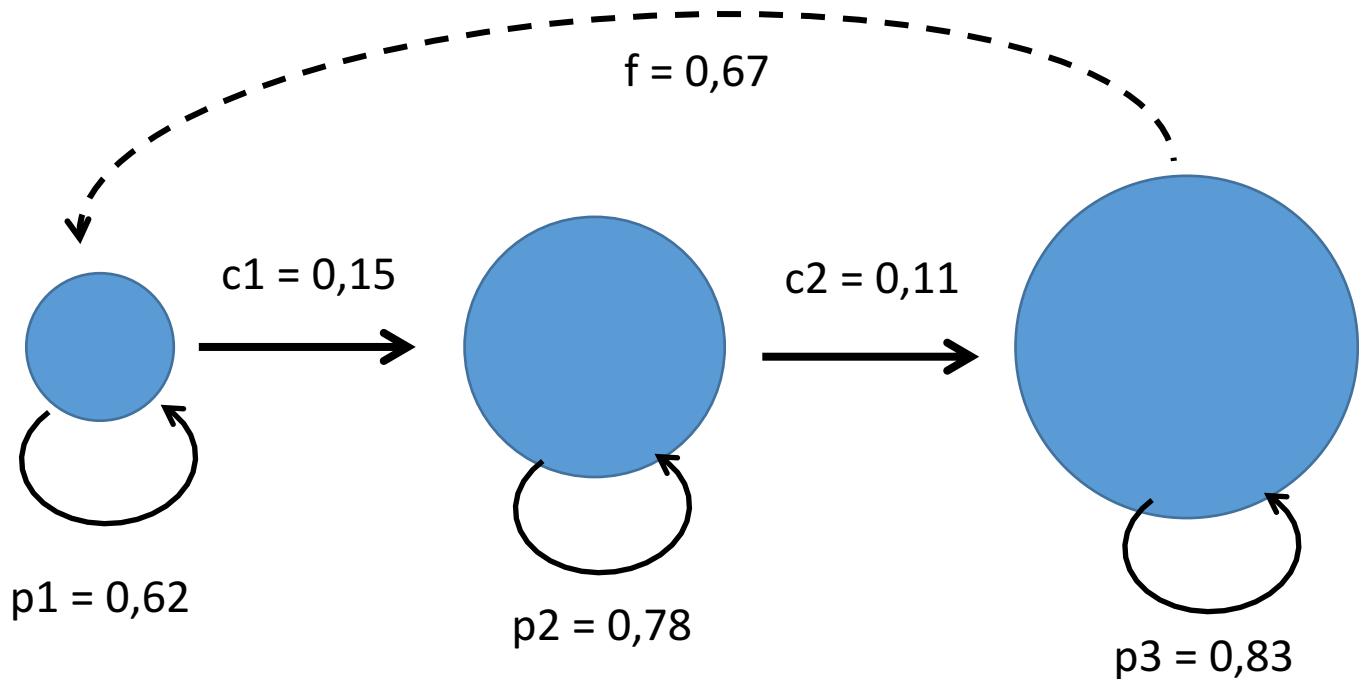
$$m3 = (0 \times n1) + (c2 \times n2) + (p3 \times n3)$$

$$\begin{matrix} n_3 \\ \begin{bmatrix} m1 \\ m2 \\ m3 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} A \\ \begin{bmatrix} 0,62 & 0 & 0,67 \\ 0,15 & 0,78 & 0 \\ 0 & 0,11 & 0,83 \end{bmatrix} \end{matrix} * \begin{matrix} n_2 \\ \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$m1 = (0,62 \times 12) + (0 \times 9) + (0,67 \times 6) = 11$$

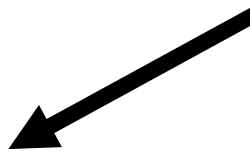
$$m2 = (0,15 \times 12) + (0,78 \times 9) + (0 \times 6) = 9$$

$$m3 = (0 \times 12) + (0,11 \times 9) + (0,83 \times 6) = 6$$



$$n_{t+1} = A n_t$$

$$\begin{array}{c} n_2 \qquad \qquad A \qquad \qquad n_1 \qquad \qquad n_3 \qquad \qquad A \qquad \qquad n_2 \\ \left[\begin{array}{c} m1 \\ m2 \\ m3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & 0 \\ 0 & c2 & p3 \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} n1 \\ n2 \\ n3 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c} m1 \\ m2 \\ m3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & 0 \\ 0 & c2 & p3 \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} n1 \\ n2 \\ n3 \end{array} \right] \end{array}$$



$$\begin{array}{c} n_4 \qquad \qquad A \qquad \qquad n_3 \qquad \qquad n_5 \qquad \qquad A \qquad \qquad n_4 \\ \left[\begin{array}{c} m1 \\ m2 \\ m3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & 0 \\ 0 & c2 & p3 \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} n1 \\ n2 \\ n3 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c} m1 \\ m2 \\ m3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & 0 \\ 0 & c2 & p3 \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} n1 \\ n2 \\ n3 \end{array} \right] \end{array} \quad (...)$$

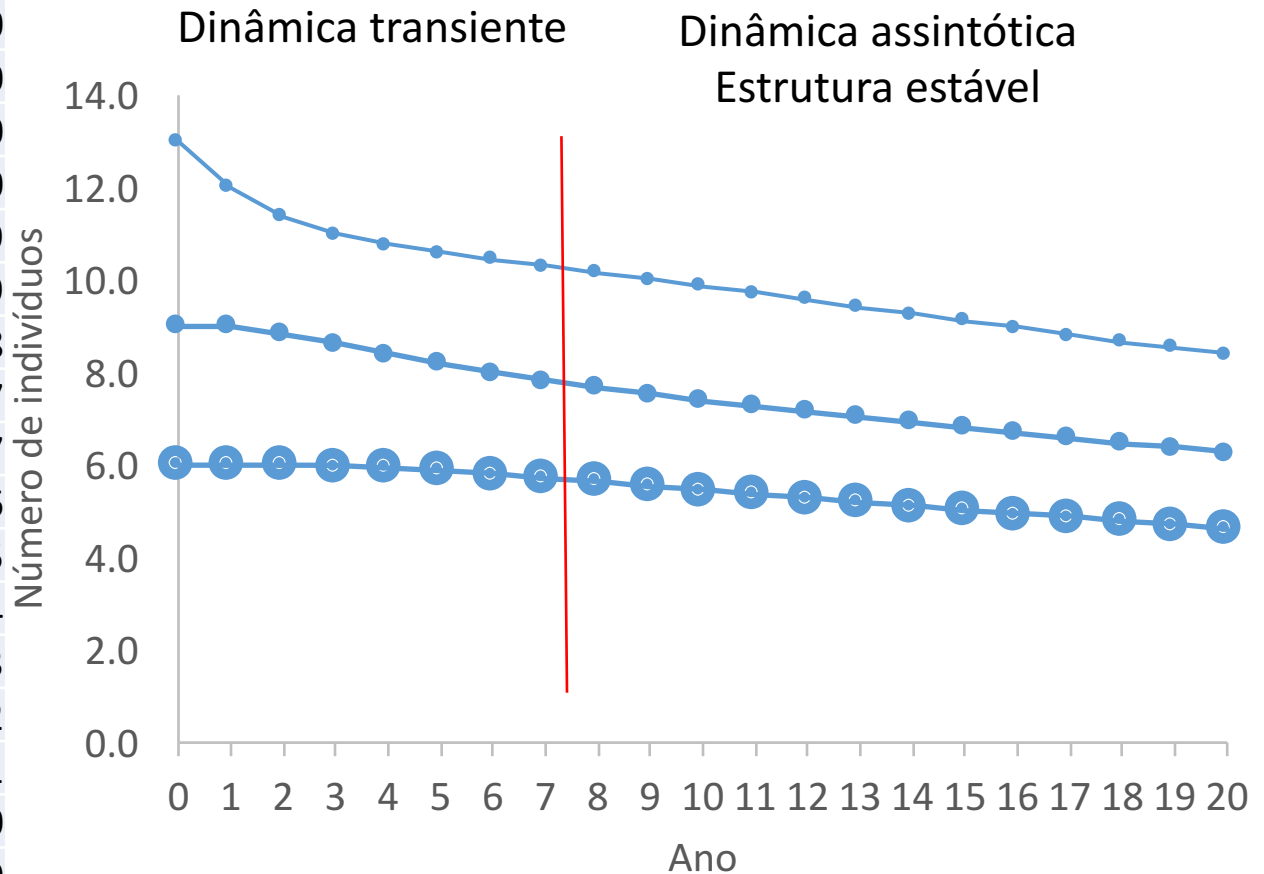
$$n_5 = A A A A n_1$$

$$n_t = A^{t-1} n_1$$

Premissa: as condições ambientais não se alteram ao longo do tempo

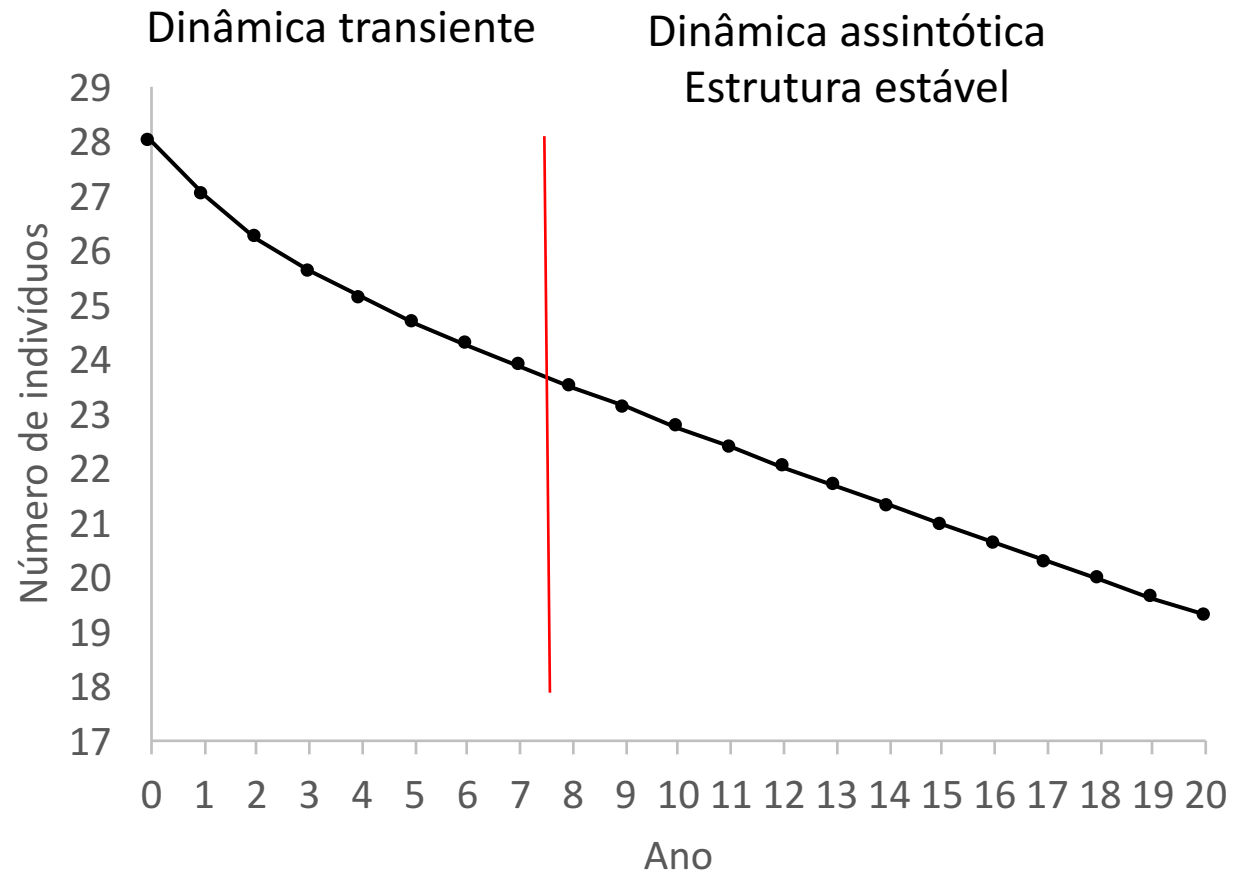
Estrutura populacional projetada ao longo do tempo

Ano	Plântula	Jovem	Adulto
0	13,0	9,0	6,0
1	12,0	9,0	6,0
2	11,4	8,8	6,0
3	11,0	8,6	6,0
4	10,8	8,4	5,9
5	10,6	8,2	5,9
6	10,4	8,0	5,8
7	10,3	7,8	5,7
8	10,2	7,7	5,7
9	10,0	7,5	5,6
10	9,9	7,4	5,5
11	9,7	7,3	5,4
12	9,6	7,2	5,3
13	9,4	7,0	5,2
14	9,3	6,9	5,1
15	9,1	6,8	5,0
16	9,0	6,7	5,0
17	8,8	6,6	4,9
18	8,7	6,5	4,8
19	8,5	6,4	4,7
20	8,4	6,3	4,6



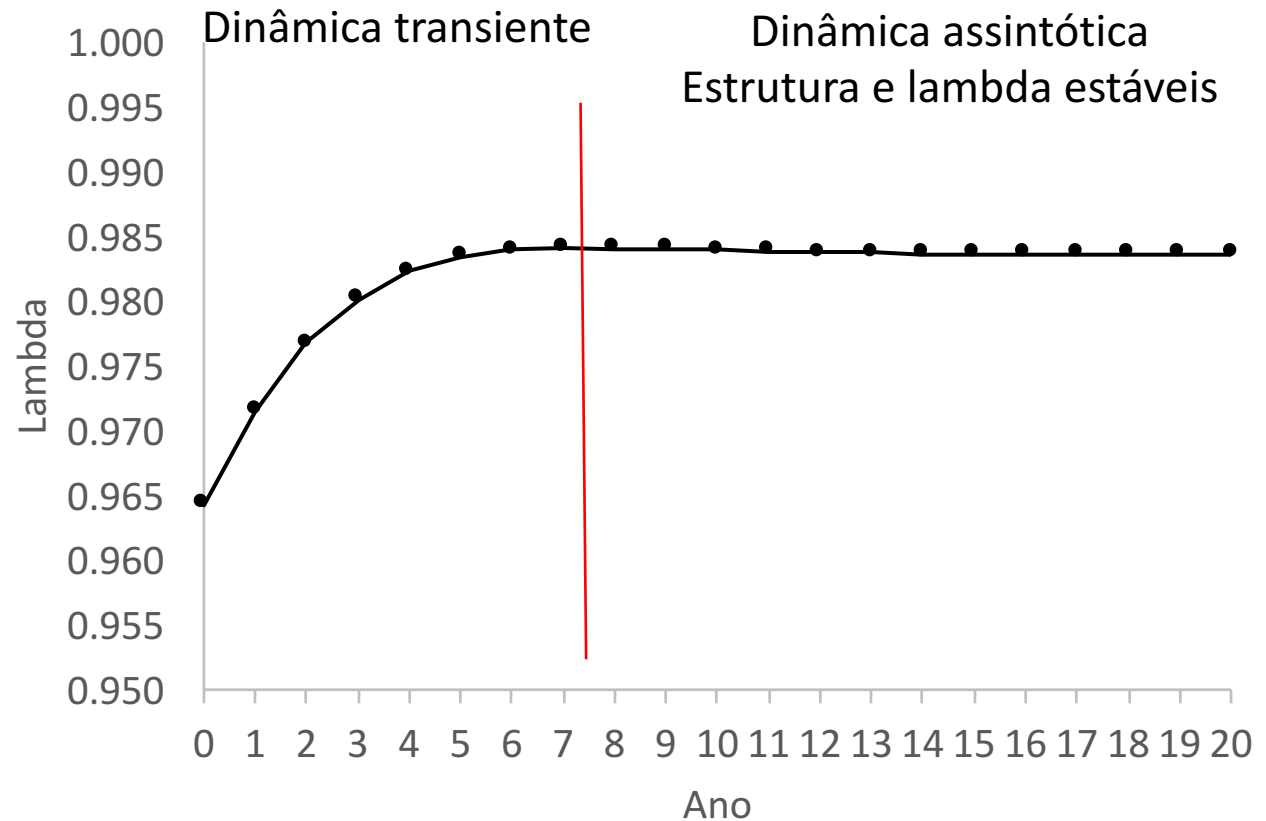
Tamanho populacional projetado ao longo do tempo

Ano	N
0	28,0
1	27,0
2	26,2
3	25,6
4	25,1
5	24,7
6	24,3
7	23,9
8	23,5
9	23,1
10	22,7
11	22,4
12	22,0
13	21,7
14	21,3
15	21,0
16	20,6
17	20,3
18	20,0
19	19,6
20	19,3



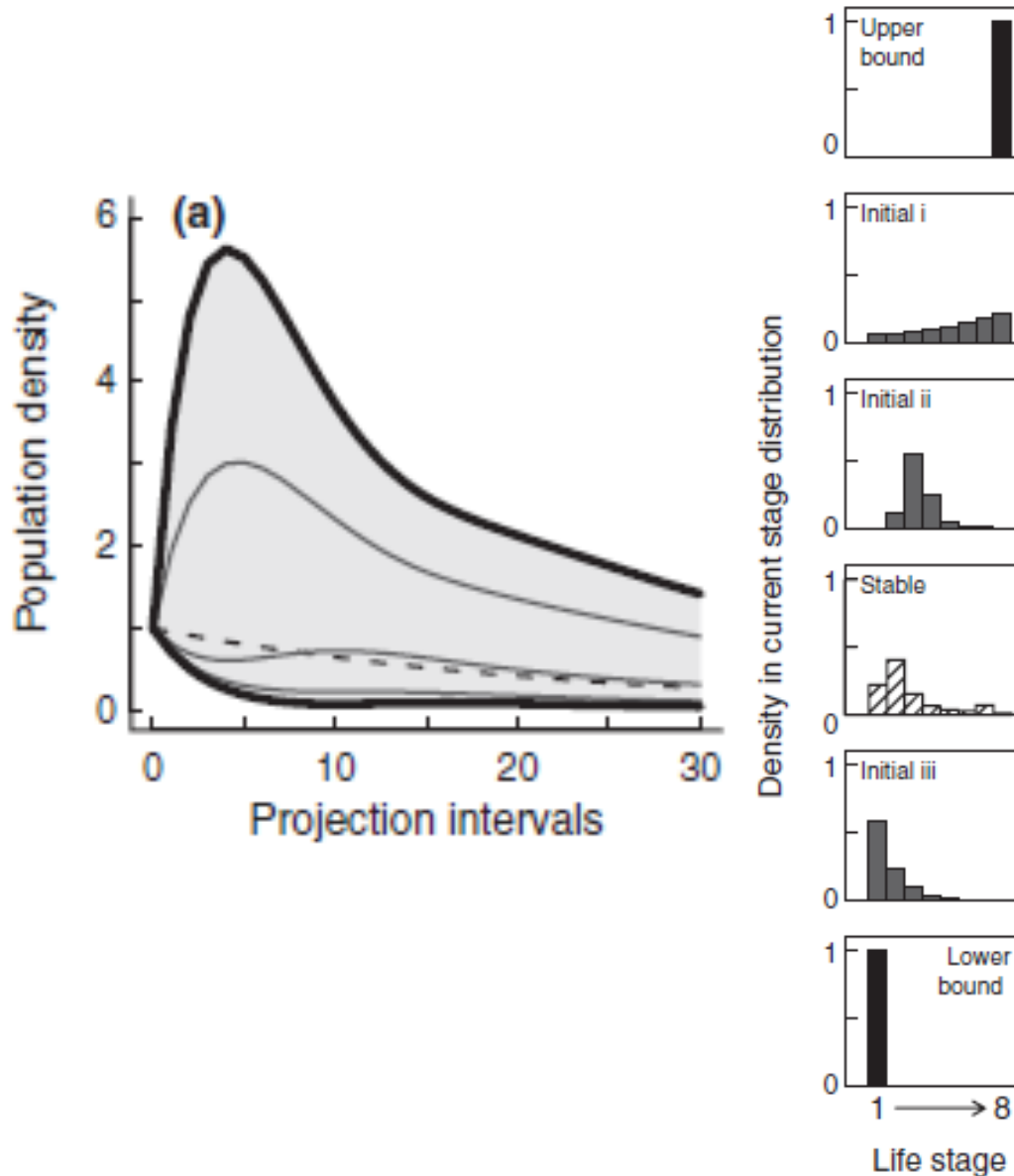
Taxa de crescimento populacional projetada ao longo do tempo

Ano	N	Lambda
0	28,0	0,964
1	27,0	0,972
2	26,2	0,977
3	25,6	0,980
4	25,1	0,982
5	24,7	0,983
6	24,3	0,983
7	23,9	0,984
8	23,5	0,984
9	23,1	0,984
10	22,7	0,984
11	22,4	0,984
12	22,0	0,984
13	21,7	0,984
14	21,3	0,984
15	21,0	0,984
16	20,6	0,984
17	20,3	0,984
18	20,0	0,984
19	19,6	0,984
20	19,3	0,984



$$\text{Lambda} = N_{t+1} / N_t$$

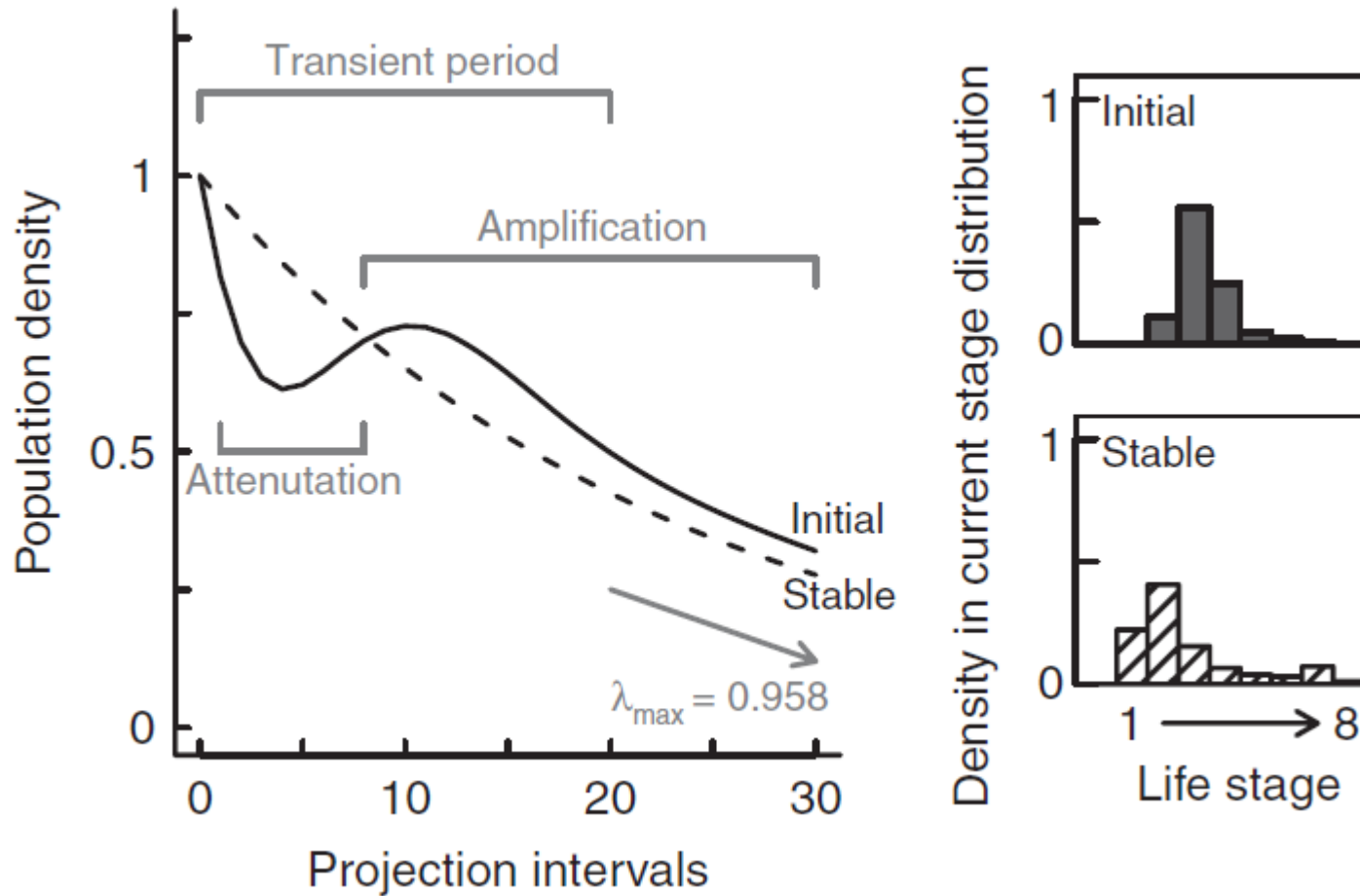
Dinâmica transiente



- **Conceito:** dinâmica de curto prazo da população, influenciada pela estrutura populacional inicial
- Importante para populações pequenas (podem ser extintas antes de atingir a assíntota)
- Importante para avaliar os efeitos de perturbações ou manejo em curto prazo

Stott et al 2011. Ecol. Letters 14:959-970

Dinâmica transiente



Dinâmica transiente

Métricas usadas para descrever a dinâmica transiente de uma população:

Reactivity – máximo crescimento populacional no primeiro intervalo demográfico

First-timestep Attenuation - mínimo crescimento populacional no primeiro intervalo demográfico

Maximum Amplification – maior tamanho populacional possível na fase transiente

Maximum Attenuation - menor tamanho populacional possível na fase transiente

Amplified Inertia – a maior densidade populacional alcançada em longo prazo considerando uma determinada estrutura populacional

Attenuated Inertia – a menor densidade populacional alcançada em longo prazo considerando uma determinada estrutura populacional

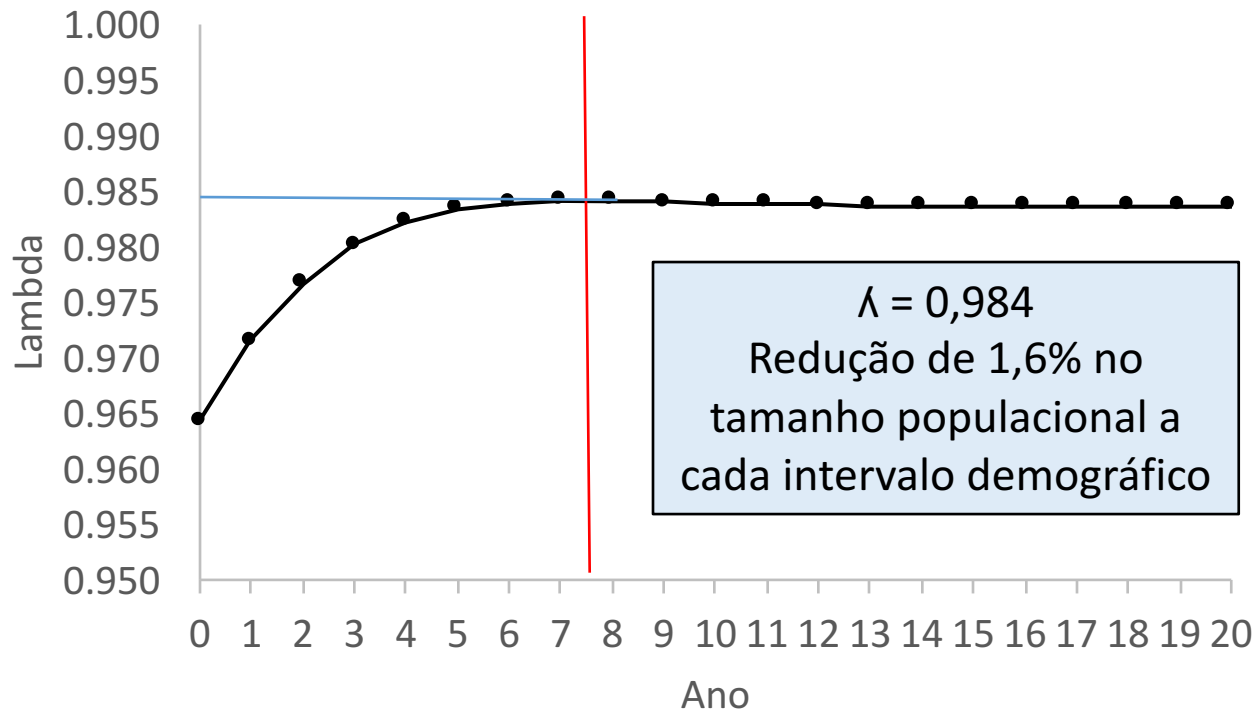
Dinâmica assintótica

Conceito: dinâmica de uma população em longo prazo, que despreza a influência da estrutura populacional inicial

Principais métricas usadas para descrever a dinâmica de uma população:

1. Taxa assintótica de crescimento populacional
2. Estrutura estável
3. Valor reprodutivo
4. Sensibilidade
5. Elasticidade

1. Taxa assintótica de crescimento populacional



Outra forma de se calcular $\lambda_{\text{assintótico}}$:

- Propriedades das matrizes (1):

Toda matriz quadrada possui um autovalor dominante e dois autovetores

A multiplicação da matriz (A) por um determinado vetor coluna (W) é igual a um determinado escalar (λ_1) multiplicado pelo mesmo vetor (W)

$$AW = \lambda_1 W$$

λ_1 = autovalor dominante da matriz A

W = autovetor direito – estrutura populacional assintótica

$$W = \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \\ w3 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo a propriedade 1 para encontrar λ_1

$$AW = \lambda_1 W$$

$$AW - \lambda_1 W = 0$$

$$(A - \lambda_1 I)W = 0$$

onde I = matriz identidade

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & 0 \\ 0 & c2 & p3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} p1 - \lambda & 0 & f3 \\ c1 & p2 - \lambda & 0 \\ 0 & c2 & p3 - \lambda \end{bmatrix}$$

- Propriedade das matrizes (2):

O determinante de toda matriz quadrada é igual a zero, portanto, $\text{Det}(A - \lambda_1 I) = 0$

$$\begin{bmatrix} p1-\lambda & 0 & f3 \\ c1 & p2-\lambda & 0 \\ 0 & c2 & p3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p1-\lambda & 0 \\ c1 & p2-\lambda \\ 0 & c2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A - \lambda_1 I) = 0$$

$$[(p1-\lambda)(p2-\lambda)(p3-\lambda)] + 0 + (f3 * c1 * c2) - 0 - 0 - 0 = 0$$

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \text{ (equação de terceiro grau)}$$

Três possíveis soluções: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$\lambda_{\text{assintótico}}$ é o maior valor real em módulo (autovalor dominante)

Ex. $\lambda_1 = 0,984$
 $\lambda_2 = 0,621 + 0,176i$
 $\lambda_3 = 0,621 - 0,176i$

Representa a velocidade de crescimento da população

Autovetores

Autovetor direito (W) – estrutura estável da população

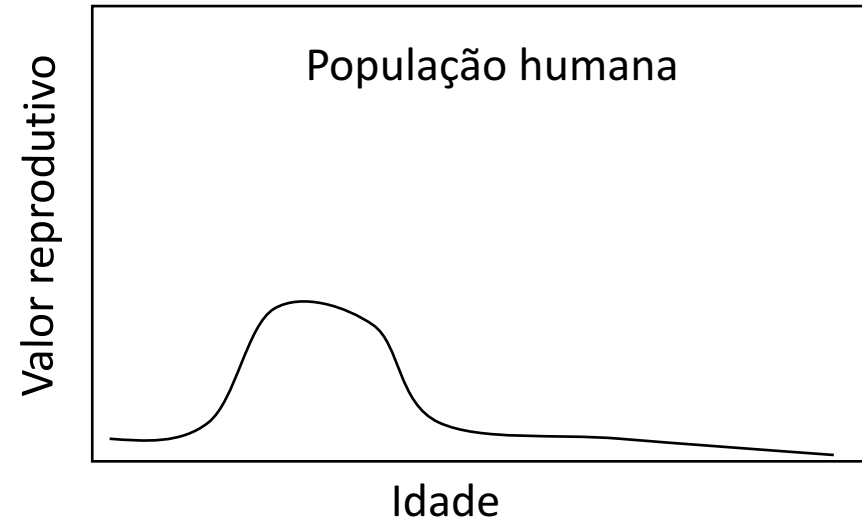
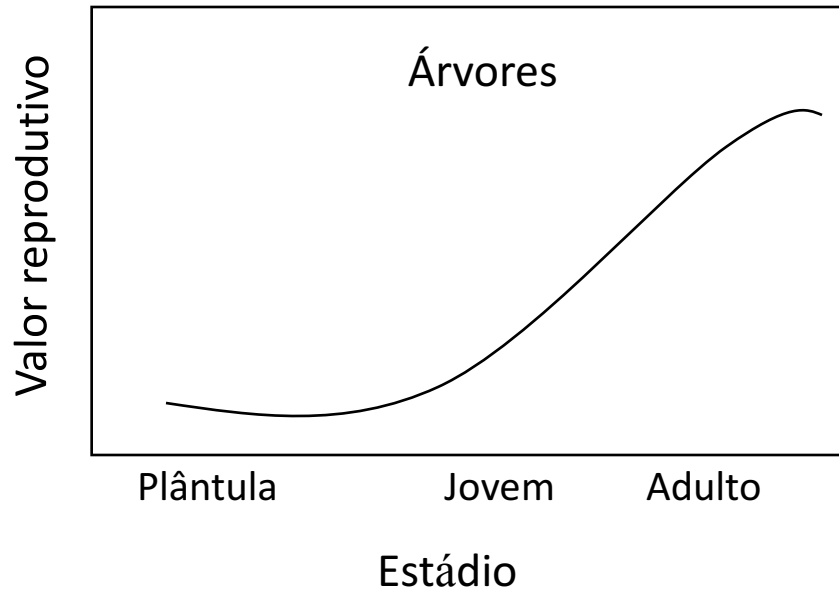
$$AW = \lambda_1 W$$

Autovetor esquerdo (V) – valor reprodutivo

$$V'A = \lambda_1 V'$$

Estádio	W	V
Plântula	0,43	0,13
Jovem	0,32	0,31
Adulto	0,24	0,57

V é uma medida da contribuição do indivíduo à próxima geração da população.

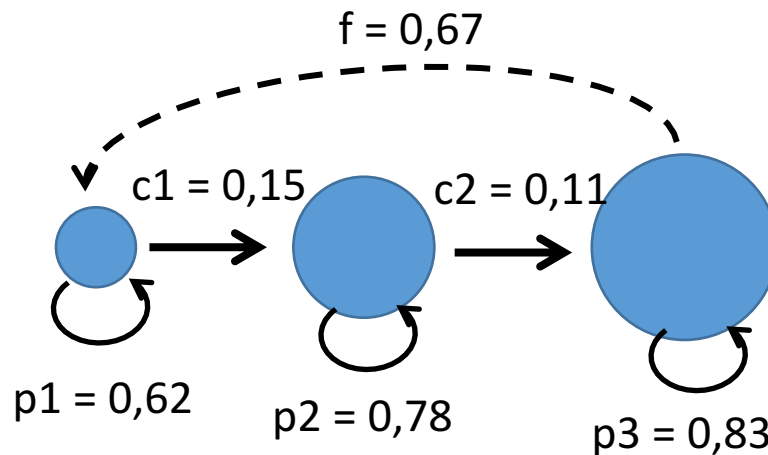


Sensibilidade de λ

$$s_{ij} = \frac{v_i w_j}{\langle \mathbf{W}, \mathbf{V} \rangle}$$

- A sensibilidade mede o quanto λ vai variar caso haja uma pequena alteração (no máximo 10%) em uma taxa da matriz A
- O termo $\langle \mathbf{W}, \mathbf{V} \rangle$ é o valor resultante da multiplicação dos vetores \mathbf{W} e \mathbf{V}
- O resultado é apresentado em uma matriz

0,19	0,14	0,11
0,46	0,34	0,25
0,85	0,63	0,47



Acréscimo de 0,10 na taxa:
Fecundidade
 $\lambda = 0,994$
 $\Delta\lambda = 0,01$

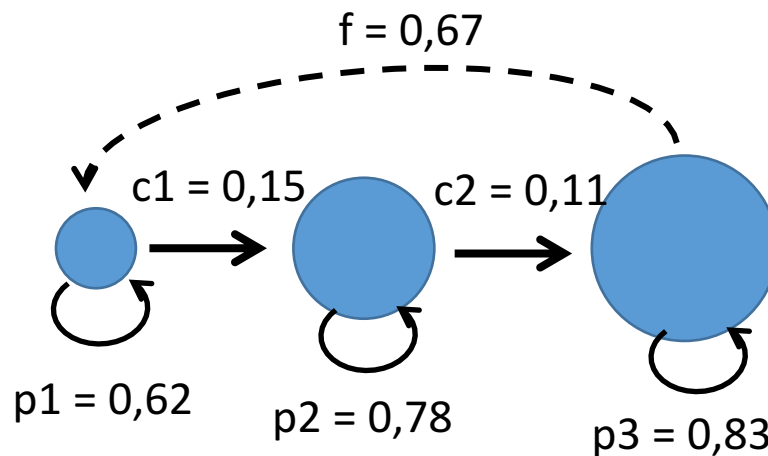
Crescimento de jovens (c_2)
 $\lambda = 1,035$
 $\Delta\lambda = 0,05$

Elasticidade de λ

$$e_{ij} = \frac{a_{ij}s_{ij}}{\lambda}$$

- A elasticidade de λ a uma pequena variação (no máximo 10%) na taxa a_{ij} da matriz A é o resultado da multiplicação da taxa pela sua sensibilidade dividido pelo valor de λ
- Representa a sensibilidade proporcional de λ a uma pequena variação na taxa
- A soma das elasticidades de todas as taxas da matriz é igual a 1

0,12	0,00	0,07
0,07	0,27	0,00
0,00	0,07	0,40



Acréscimo de 10% na taxa:

Fecundidade
 $\lambda = 0,991$
 $\Delta\lambda = 0,01$

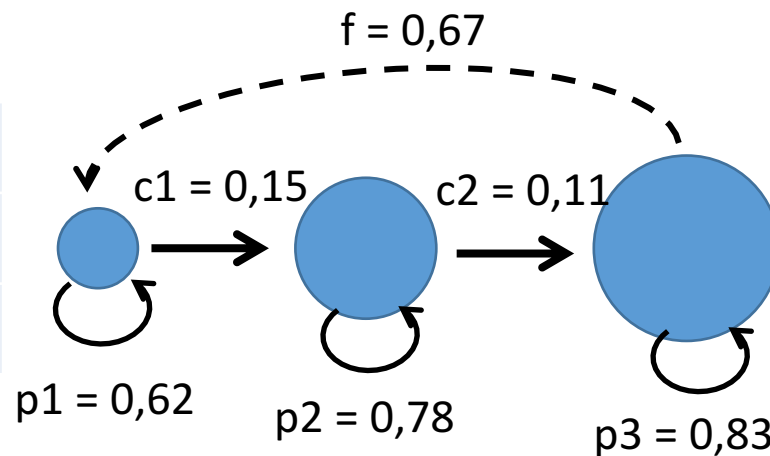
Permanência de adultos (p3)
 $\lambda = 1,027$
 $\Delta\lambda = 0,04$

Elasticidade de λ

$$e_{ij} = \frac{a_{ij} s_{ij}}{\lambda}$$

- A elasticidade de λ a uma pequena variação (no máximo 10%) na taxa a_{ij} da matriz A é o resultado da multiplicação da taxa pela sua sensibilidade dividido pelo valor de λ
- Representa a sensibilidade proporcional de λ a uma pequena variação na taxa
- A soma das elasticidades de todas as taxas da matriz é igual a 1

0,12	0,00	0,07
0,07	0,27	0,00
0,00	0,07	0,40



Soma das elasticidades:

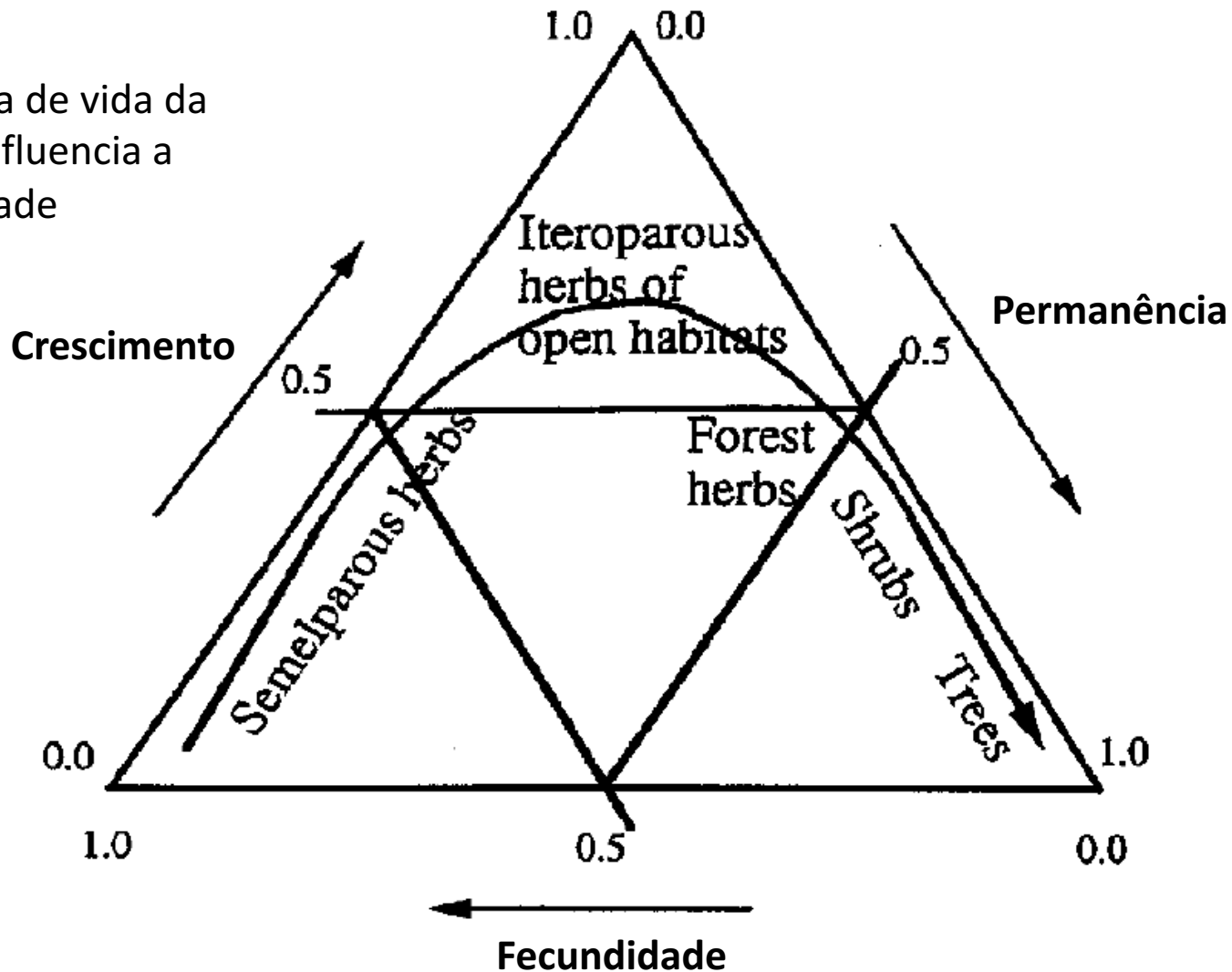
Permanência
 $0,12 + 0,27 + 0,40 = 0,79$

Crescimento
 $0,07 + 0,07 = 0,14$

Fecundidade = 0,07

Triângulo demográfico

A história de vida da planta influencia a elasticidade



LTRE – Life Table Response Experiments

- Permite comparar a dinâmica entre duas ou mais populações (ou entre anos)
- A análise encontra a taxa demográfica que mais contribui para a diferença de λ entre matrizes
- Essa contribuição consiste na diferença entre os valores da taxa ponderada pela sensibilidade de λ à variações na taxa

Exemplo:

- A alteração de qual das duas taxas abaixo tem maior contribuição para a variação do λ entre matrizes?

A1 ($\lambda = 0,984$)

$$\begin{bmatrix} 0,62 & 0 & 0,67 \\ 0,15 & 0,78 & 0 \\ 0 & 0,11 & 0,83 \end{bmatrix}$$

A2 ($\lambda = 1,215$)

$$\begin{bmatrix} 0,62 & 0 & 5,00 \\ 0,15 & 0,78 & 0 \\ 0 & 0,11 & 0,89 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

A1 ($\lambda = 0,984$)

$$\begin{bmatrix} 0,62 & 0 & 0,67 \\ 0,15 & 0,78 & 0 \\ 0 & 0,11 & 0,83 \end{bmatrix}$$

A2 ($\lambda = 1,215$)

$$\begin{bmatrix} 0,62 & 0 & 5,00 \\ 0,15 & 0,78 & 0 \\ 0 & 0,11 & 0,89 \end{bmatrix}$$

Matriz média

$$\begin{bmatrix} 0,62 & 0 & 2,83 \\ 0,15 & 0,78 & 0 \\ 0 & 0,11 & 0,86 \end{bmatrix}$$

Comparando A1 com A2:

A2 - média

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2,17 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,03 \end{bmatrix}$$

Sensibilidade

$$\begin{bmatrix} 0,23 & 0,10 & 0,04 \\ 0,76 & 0,33 & 0,14 \\ 2,41 & 1,06 & 0,44 \end{bmatrix}$$

Contribuição LTRE

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,09 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix}$$

A diferença em λ foi 9 vezes mais influenciada pela diferença de fecundidade do que pela diferença na permanência dos adultos



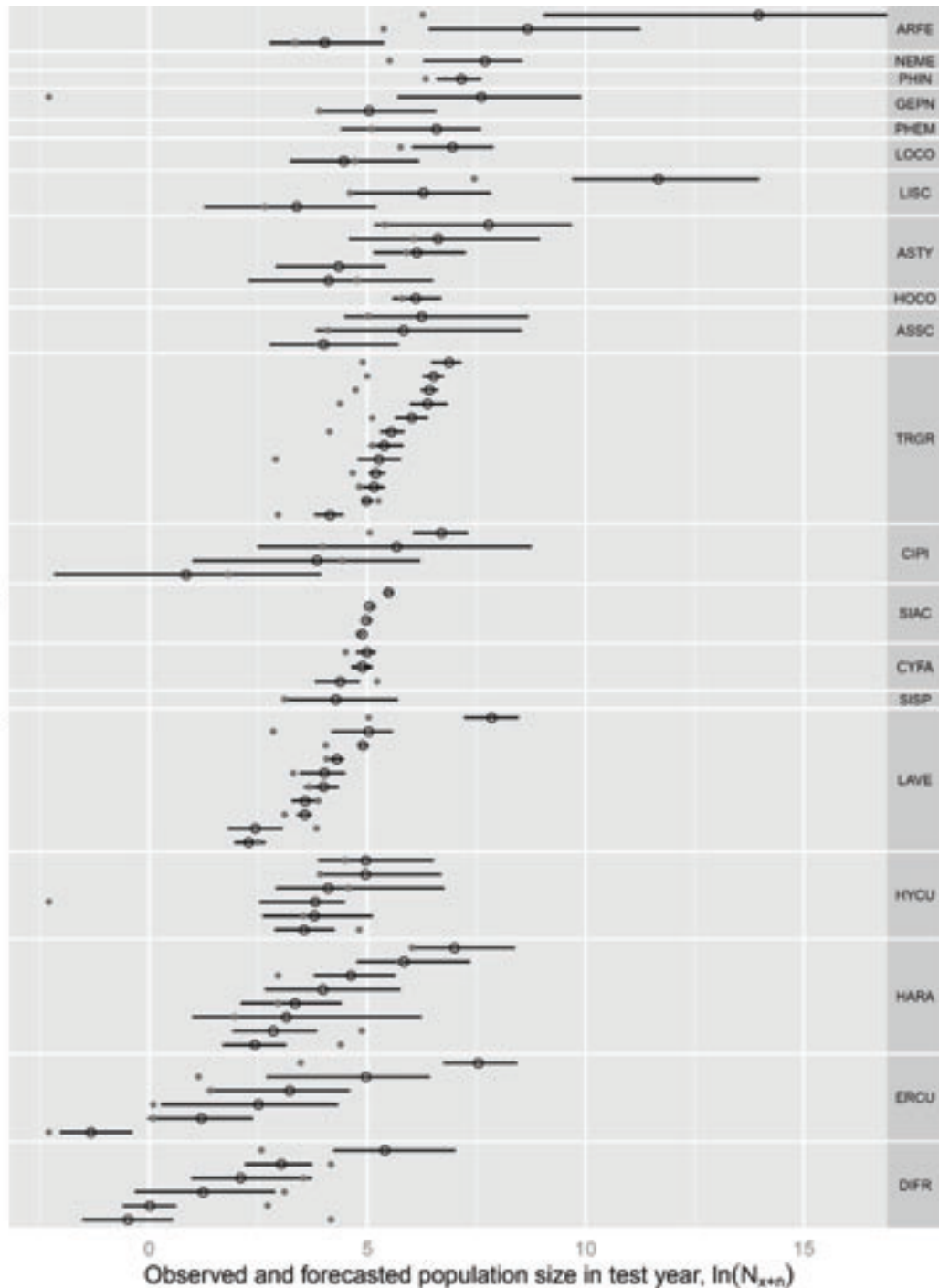
Contributed Paper

Ability of Matrix Models to Explain the Past and Predict the Future of Plant Populations

ELIZABETH E. CRONE,* MARTHA M. ELLIS,† WILLIAM F. MORRIS,‡ AMANDA STANLEY,§
TIMOTHY BELL,** PAULETTE BIERZYCHUDEK,†† JOHAN EHRLÉN,‡‡ THOMAS N. KAYE,§
TIFFANY M. KNIGHT,§§ PETER LESICA,*** GERARD OOSTERMEIJER,†††
PEDRO F. QUINTANA-ASCENCIO,‡‡‡ TAMARA TICKTIN,§§§ TERESA VALVERDE,****
JENNIFER L. WILLIAMS,†††† DANIEL F. DOAK,‡‡‡‡ RENGAIAN GANESAN,§§§§
KATHYRN MCEACHERN,***** ANDREA S. THORPE,§ AND ERIC S. MENGES†††††

Crone et al. 2013

- Teste realizado com 82 populações de 20 espécies de plantas
- 1 - Amostragem inicial durante dois a cinco anos consecutivos
- 2 - Estimativa do tamanho populacional para t anos no futuro (pelo menos 5 anos) usando modelos matriciais
- 3 - Reamostragem no ano t para conferir se a estimativa estava, ou não, correta



- 40% das populações observadas caíram dentro do intervalo de confiança da estimativa feita usando os modelos matriciais

- Em geral, os modelos matriciais superestimaram o tamanho populacional real

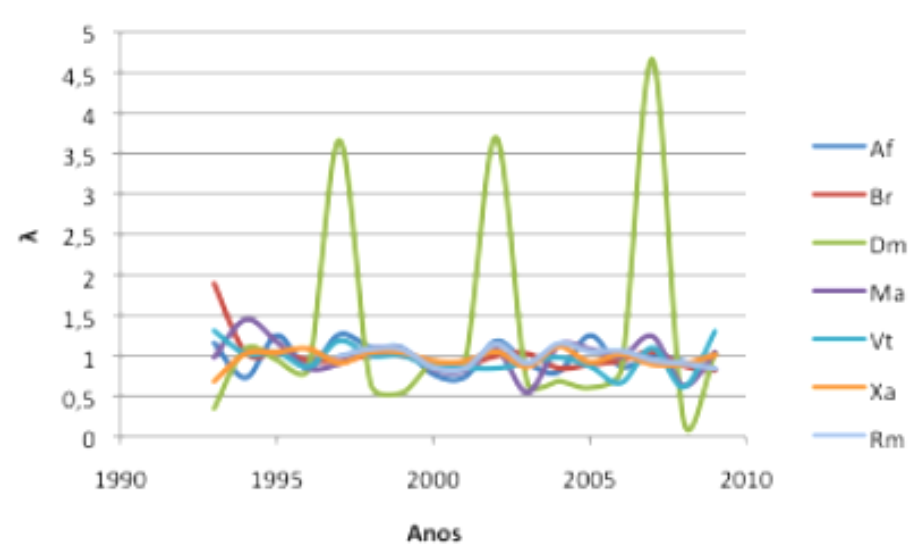
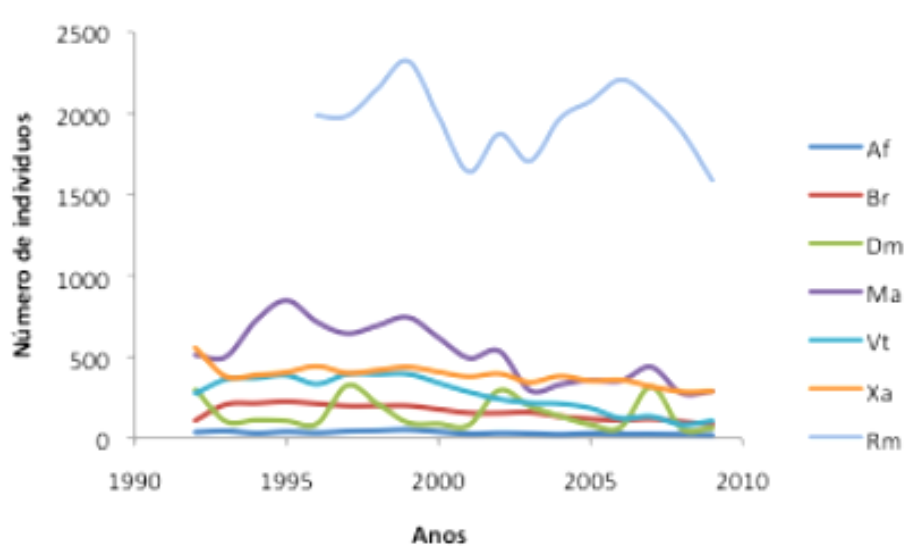
- O erro da estimativa deve estar relacionado à mudanças nas condições ambientais, principalmente precipitação e temperatura

● Estimativa \pm intervalo de conf.
○ Observado

Este é um problema de todo modelo preditivo. Não conseguimos prever adequadamente nem o clima.

- Modelos matriciais são pouco precisos para estimar o futuro das populações, a não ser que as condições ambientais se mantenham constantes;
- Comparar o comportamento de populações sujeitas a diferentes condições ambientais;
- Avaliar os efeitos em curto prazo de ações de manejo (dinâmica transiente);
- Determinar os processos demográficos mais importantes para a dinâmica populacional

A densidade e a taxa de crescimento populacional das espécies variam muito entre anos



Af: *Anadenanthera falcata*
Br: *Bauhinia rufa*
Dm: *Dalbergia miscolobium*
Ma: *Miconia albicans*
Vt: *Vochysia tucanorum*
Xa: *Xylopia aromatica*

Fatores estocásticos:

- Variações climáticas entre anos
- Competição interespecífica
- Disponibilidade de recursos
- Herbivoria
- Fogo

Estocasticidade ambiental

- Incluir a variabilidade ambiental ao longo do tempo no modelo matricial
- Estimador de Heyde e Cohen (1985)
- Exemplo:
- Amostragens com dois intervalos demográficos

B - ano bom	R - ano ruim
$\begin{bmatrix} 0,62 & 0 & 0,67 \\ 0,15 & 0,78 & 0 \\ 0 & 0,11 & 0,83 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,62 & 0 & 0,67 \\ 0,15 & 0,78 & 0 \\ 0 & 0,11 & 0,50 \end{bmatrix}$

- Como a dinâmica populacional é influenciada pela frequência de anos ruins ao longo do tempo?

- 50% de chance de ocorrer um ano ruim (frequencia de 0,5):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequencia de Matrizes	B	B	R	B	R	R	B	R	B	R	B	R	R	B	B
N	28	30	27	28	27	25	26	25	27	26	27	26	24	25	26
Log λ_t	0,03	-0,05	0,02	-0,02	-0,03	0,02	-0,02	0,03	-0,02	0,02	-0,02	-0,03	0,02	0,02	0,03

$$\text{Log}\lambda_t = \log N(t+1) - \log N(t)$$

$$T = 1.000$$

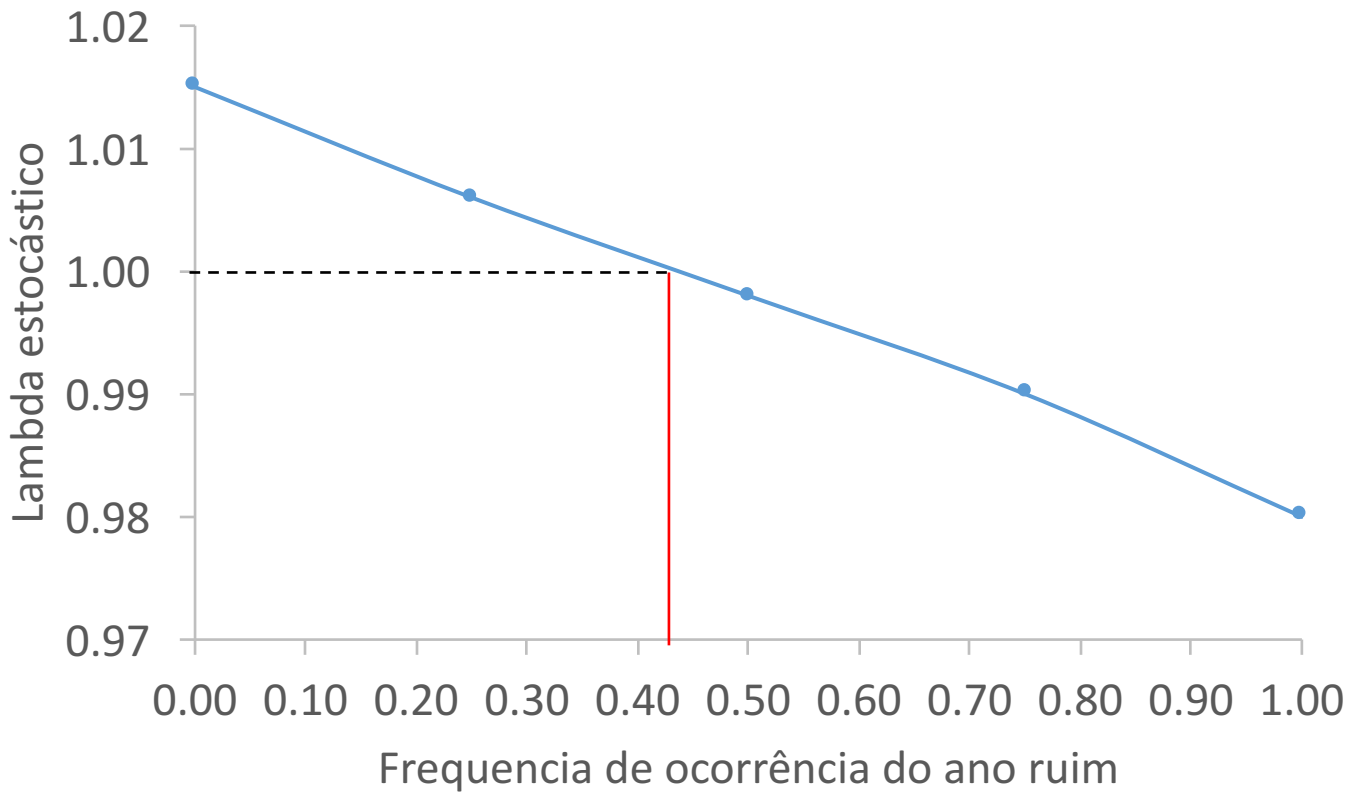
$$\text{Log}\lambda_s = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \log\lambda_1(t)$$

$$\lambda_s = 0,998$$

- 25% de chance de ocorrer um ano ruim (frequencia de 0,25):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequencia de Matrizes	B	B	R	B	R	B	B	B	B	R	B	B	R	B	B
N	28	30	27	28	27	28	30	32	33	32	32	33	31	32	34
$\text{Log}\lambda_t$	0,03	-0,05	0,02	-0,02	0,02	0,03	0,03	0,01	-0,01	0,00	0,01	-0,03	0,01	0,03	0,03

$$\lambda_s = 1,006$$



Resumo da aula

- A dinâmica populacional pode ser descrita de três formas diferentes
 - 1) Dinâmica transiente
 - 2) Dinâmica assintótica
 - + Estrutura populacional estável
 - + Taxa de crescimento populacional assintótica
 - + Valor reprodutivo dos indivíduos
 - + Sensibilidade e elasticidade
 - 3) Dinâmica que considera os fatores estocásticos
- O uso dos modelos matriciais para prever o futuro deve ser evitado
- Os modelos matriciais são ferramentas poderosas para estudos de simulação e comparação entre populações

Referências Gerais

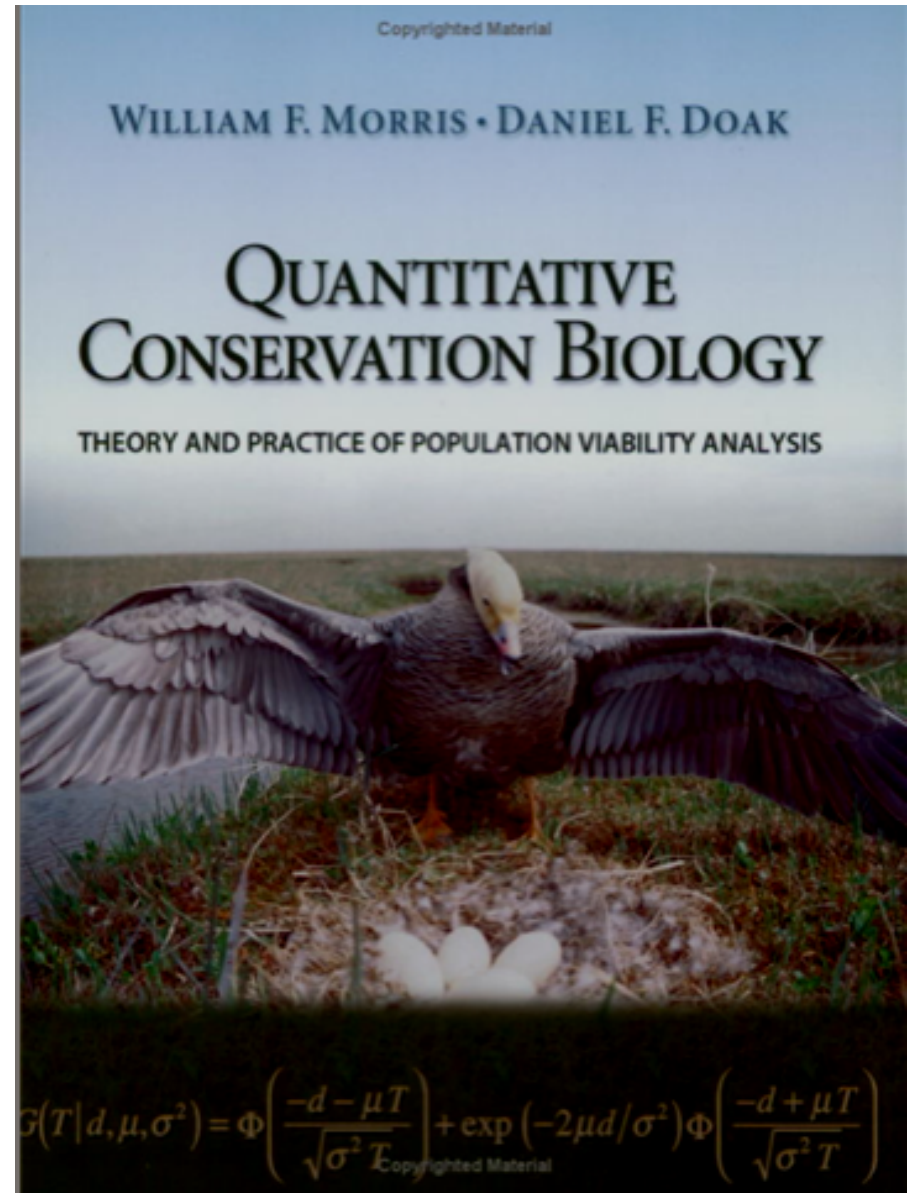
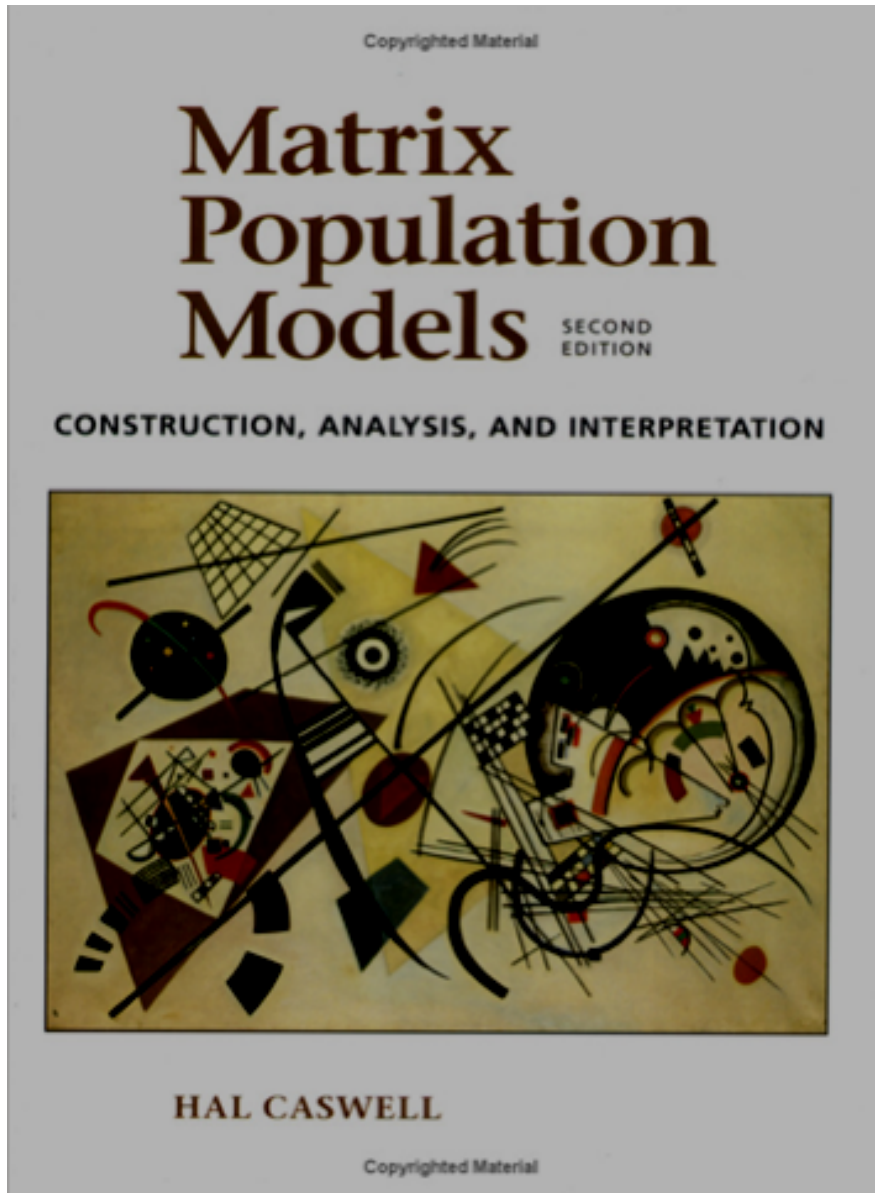
Goteli, N. J. 2009. Ecologia. 4ª Ed. Editora Planta.

Gurevitch, J.; Scheiner, S.; Fox, G. 2002. The ecology of plants. Sinauer Associates, Sunderland, USA.

Harper, J. L. 1977. Population Biology of Plants. Academic Press, London.

Silvertown, J. & Charlesworth, D. 2001. Introduction to plant population biology. 4ª Ed. Blackwell Publishing, USA.

Referências sobre modelos matriciais



Aula prática

Instalar:

R (<https://cran.r-project.org/>)

Rstudio (<https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/>)

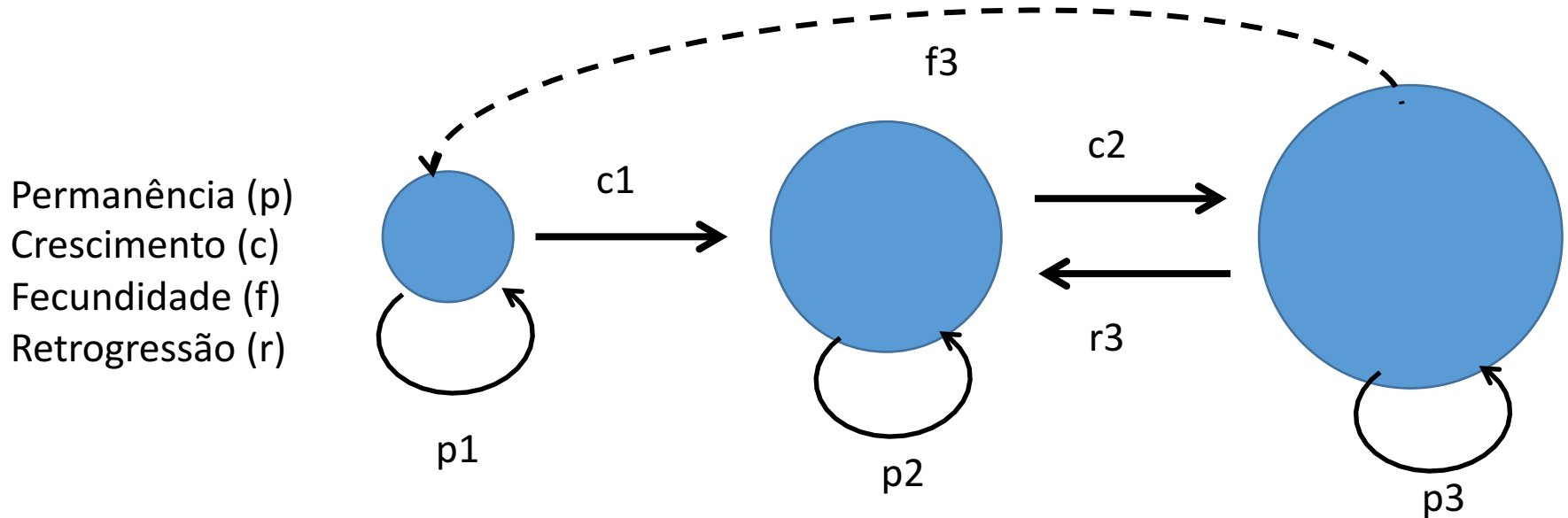
Pacote popbio (<https://cran.r-project.org/web/packages/popbio/>)

Dados: “dados para pratica.xlsx”

Script: “script aula matrizes.r”

Aula prática

Herbácea ameaçada de extinção que ocorre no sobosque de Mata de Galeria e foi amostrada em uma fazenda.



Tempo t

plântula jovem adulto

$$A = \begin{bmatrix} p1 & 0 & f3 \\ c1 & p2 & r3 \\ 0 & c2 & p3 \end{bmatrix}$$

plântula

jovem

adulto

Tempo t+1

Fecundidade: nº
médio de plântulas
produzidas por um
ind. reprodutivo

Amostragem 1

Amostragem 2

Amostragem 3



Intervalo demográfico 1

Matriz A1

Intervalo demográfico 2

Matriz A2

No intervalo demográfico 1 a precipitação anual foi 2 vezes menor que no intervalo demográfico 2

Planilha de dados:

t1	t2	t3
1	1	2
NA	1	1
1	m	NA
2	2	m
NA	NA	1
3	2	3
3	3	m

entre t1 e t2	entre t2 e t3
permaneceu	creceu
recrutou	permaneceu
morreu	NA
permaneceu	morreu
NA	recrutou
regrediu	creceu
permaneceu	morreu

Legenda:	
Símbolo	Descrição
1	plântula
2	jovem
3	adulto
m	morta
NA	célula em branco

·
·
·

Questão da aula:

Refazer todas as análises feitas na aula prática usando o mesmo arquivo de dados e o mesmo script do R. Escrever um relatório que contenha todos os resultados obtidos na análise e a sua interpretação. Escrever um parágrafo de até 10 linhas contendo sugestões viáveis de manejo desta população para o proprietário da fazenda, que tem interesse em conservar a espécie na área.